Section 5. Secondary vocational education. Pedagogy of secondary vocational education

https://doi.org/10.29013/EJEAP-23-2-46-50

Takhirov Bahadur Omar ogly,
Baku State University, Azerbaijan

VARIABLE APPROACH TO SOLVING PROBLEMS IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS

Abstract. Many mathematical problems allow for a range of interesting and efficient ways to solve them. Not infrequently, these methods differ significantly from each other both ideologically and externally. Getting acquainted with them, students get the opportunity to see the essence of the problem from different angles. At the same time, creative thinking, breadth of approaches and an informal understanding of the subject are formed.

In the article, a number of aspects of this issue are given, corresponding tasks from different sections of the mathematics course for grades 5–11 are given.

Keywords: solving problems in different ways, speed, section, volume, vector, mixed product of vectors.

Тахиров Бахадур Омар оглы,
Бакинский Государственный Университет, Азербайджан

ВАРИАТИВНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. Многие математические задачи допускают целый спектр интересных и эффективных способов решения. Не редко эти способы значительно отличаются друг на друга так идейно, так и внешне. Знакомясь с ними, учащиеся получают возможность увидеть сущность задачи с разных сторон. При этом формируются творческое мышление, широта подходов и неформальное понимание предмета.

В статье ряд аспектов данного вопроса, приводятся соответствующие задачи из разных разделов курса математики 5–11 классов.

Ключевые слова: решение задач разными способами, скорость, сечение, объем, вектор, смешанное произведение векторов.

Решение задач разными способами имеет важное методическое значение и представляет большие возможности для совершенствования процесса обучения математике.

Во-первых, поиск различных способов решения задачи – один из эффективных путей реализации дидактических принципов сознательности и активности усвоения учебного материала. При решении одной и той же задачи различными способами нередко известное учащимся упражнение переносится в качественно новые условия, повторяется в новых связях и сочетаниях [1].

Во-вторых, для решения задач различными способами учащимся приходится использовать многие теоретические факты, методы и приемы, актуализировать их с точки зрения применимости к данной задаче ситуации, что способствует формированию и развитию гибкости мышления [2].

В-третьих, в процессе поиска различных способов решения одной задачи преобладает творческое мышление, что способствует развитию не только интеллекта, но и ряда нравственных качеств, во многом определяет мировоззрение школьника [5].

Кроме того, решение задач различными способами направлено и на эстетическое воспитание учащихся. Именно здесь школьники учатся самостоятельно находить более простые и красивые решения задач, начинают видеть взаимосвязь всех частей математики, и значит, и красоту этой науки.

Сначала приведем такие задачи для V класса.

Задача 1. В три магазина привезли 3840 *кг* масла. После того, как первый магазин продал 568 *кг* масла, второй 624 *кг* и третий 401 *кг*, масла осталось во всех магазинах поровну. Сколько килограммов масла получил каждый магазин?

Решение.

I способ.

1) $568+624=1192$ (*кг*);
2) $1192+401=1593$ (*кг*);
3) $3840-1593=2247$ (*кг*);
4) $2247:3=749$ (*кг*);
5) $749+568=1317$ (*кг*);
6) $749+624=1373$ (*кг*);
7) $749+401=1150$ (*кг*).

Ответ: 1317 *кг*, 1373 *кг* и 1150 *кг*.

II способ.

1) $3840-568=3272$ (*кг*);
2) $3272-624=2648$ (*кг*);
3) $2648-401=2247$ (*кг*);
4) $2247:3=749$ (*кг*);
5) $749+568=1317$ (*кг*);
6) $749+624=1373$ (*кг*);
7) $749+401=1150$ (*кг*).

Каждое решение вышеприведенной задачи имеет свое методическое преимущество [3].

А теперь рассмотрим следующую задачу для VI класса.

Задача 2. В магазин привезли 600 *кг* муки. В первой половине дня продали $\frac{1}{4}$ всей муки, а во второй половине дня $\frac{2}{5}$ остатка. Сколько муки осталось непроданной?

I способ.

1) $600\cdot\frac{1}{4}=150$ (*кг*);
2) $600-150=450$ (*кг*);
3) $450\cdot\frac{2}{5}=180$ (*кг*);
4) $450-180=270$ (*кг*).

Ответ: 270 *кг*.

II способ.

1) $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,
2) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$,
3) $\frac{3}{4}-\frac{3}{10}=\frac{9}{20}$,
4) $600\cdot\frac{9}{20}=270$ (*кг*).

Каждое решение вышеприведенной задачи имеет свое методическое преимущество.

Рассмотрим задачу для VII класса.

Задача 3. Два туриста вышли одновременно из двух городов, расстояние между которыми 38 *км* и встретились через 4 *ч*. С какой скоростью шел каждый турист, если известно, что первый прошел до встречи на 2 *км* больше второго?

Решение.

I способ. Пусть второй турист прошел x *км*. Тогда первый турист пройдет $(x+2)$ *км* до встречи. По условию задачи имеем:

$$2(x+1)=38;$$
$$x=18\ (км).$$

Значит, первый турист прошел до встречи 20 *км*. Тогда скорость первого туриста будет $20:4=5$ *км/ч*, а второго туриста – $18:4=4{,}5$ *км/ч*.

II способ. Пусть скорость первого туриста x *км/ч*, а второго туриста – y *км/ч*. Тогда по условию задачи имеем:

$$\begin{cases}4(x+y)=38\\4(x-y)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=9{,}5\\x-y=0{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}x=5\ км/ч,\\y=4{,}5\ км/ч\end{matrix}$$

Теперь рассмотрим две геометрические задачи для учащихся VIII–XI классов.

Задача 4. Высота прямоугольного треугольника ABC делит гипотенузу AB на отрезки $AD=16$ и $DB=9$. Найдите стороны треугольника ABC.

Решение.

I способ. По свойству высоты, опущенной из вершины прямого угла, имеем:

$$CD^2=BD\cdot DA\Leftrightarrow CD^2=144\Leftrightarrow 12.$$

Тогда из прямоугольных треугольников BDC и ACD имеем:

$$BC^2=BD^2+CD^2\Leftrightarrow BC=\sqrt{81+144}=15;$$
$$AC^2=AD^2+CD^2\Leftrightarrow AC=\sqrt{256+144}=20,$$
$$AB=9+16=25.$$

Ответ: 15, 20 и 25.

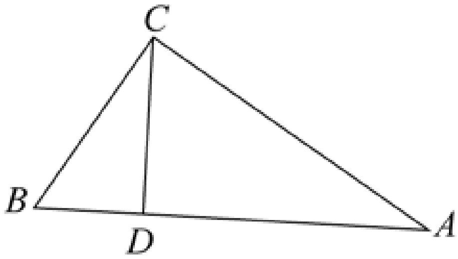

Рисунок 1.

II способ. По свойстве высоты опущенной из вершины прямого угла имеем (рис. 1):

$$BC^2=BD\cdot AB\Leftrightarrow BC=\sqrt{9\cdot 25}=3\cdot 5=15;$$
$$AC^2=AD\cdot AB\Leftrightarrow AC=\sqrt{16\cdot 25}=4\cdot 5=20.$$

Задача 5. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Площадь треугольника BOC равна 9, а площадь треугольника AOD равна 16. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Решение.

I способ. Очевидно, что треугольники BOC и AOD подобны. Из подобия этих треугольников имеем:

$$\frac{S_{BOC}}{S_{AOD}}=\frac{9}{16}=k^2,$$

где k – коэффициент подобия.

Тогда $\frac{BO}{OD}=\frac{3}{4}$.

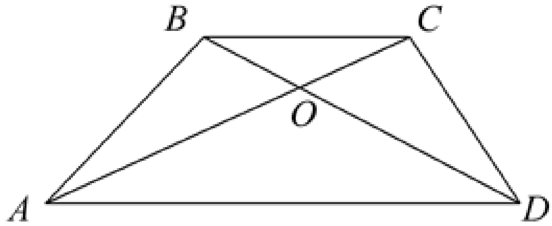

Рисунок 2.

Из рисунка 2 видно, что треугольники BOC и COD имеют общую высоту их основания BO и OD лежат на одной прямой. Следовательно,

$$\frac{S_{BOC}}{S_{COD}}=\frac{BO}{OD}=\frac{3}{4}.$$

Отсюда получаем, что $S_{COD}=12$.

Аналогично можно найти, что $S_{AOD}=12$. Тогда площадь трапеции $ABCD$ будет

$$S_{ABCD}=9+16+2\cdot 12=49.$$

Ответ: 49.

II способ. Известно, что если площадь треугольников BOC и AOD известны, то площадь трапеции $ABCD$ равна

$$S_{ABCD}=\left(\sqrt{S_{BOC}}+\sqrt{S_{AOD}}\right)^2=\left(\sqrt{9}+\sqrt{16}\right)^2=49.$$

Каждое решение вышеприведенной задачи имеет свое методическое преимущество [4].

Задача 6. В правильной четырехугольной призме $SMNQR$ через сторону основания MN и середины боковых ребер SQ и SR проведено сечение, рассекающее пирамиду на две части (рис. 3). Найдите отношение объемов этих частей.

Решение.

I способ. Данная в условии плоскость сечения в пересечении с пирамидой $SMNQR$ образует трапецию $MNAB$. Диагональное сечение SNR делит пирамиду $SMNQR$ на четырехугольную пирамиду $NQABR$ и треугольные пирамиды $SNBA$, $SMNB$ и $SMBN$.

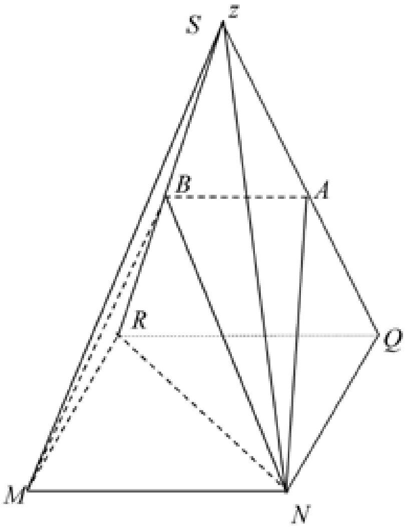

Рисунок 3.

Объемы пирамид $MRBN$ и $MNBS$ равны, так как у них общая вершина M и равновеликие основания. Учитывая, что AB средняя линия треугольника SRQ имеем:

$$S_{BSA} = \frac{1}{3} S_{QRBA}.$$

Поэтому $V_{NQABR} = 3V_{NBSA}$.

У пирамид $NBSA$ и $SMBN$ общее основание – треугольник SBN, расстояние от точки A до плоскости SBN вдвое меньше расстояния точки M до этой же плоскости, так как точка A середина отрезка SQ, а точки M и Q равноудалены от плоскости треугольника SBN.

Следовательно,

$V_{MSBN} = 2 \cdot V_{BSAN}$.

Итак,

$$\frac{V_{NSBA}}{V_{NRBAQ}} = \frac{1}{3}; \quad \frac{V_{SMBN}}{V_{SMNAB}} = \frac{2}{3}.$$

Из последних отношений следует

$$\frac{V_{SMNAB}}{V_{MNQRBA}} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{V_{SMNAB}}{V_{MNQRBA}} = \dfrac{3}{5}$.

II способ. Введем прямоугольную систему координат:

$$M\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right),\ N\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right),\ A\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{h}{2}\right),$$

$$S(0;0;h),\ B\left(-\frac{a}{4};-\frac{a}{4};\frac{h}{2}\right).$$

Известно, что объем треугольной пирамиды равен модулю смешанного произведения трех векторов, образующих пирамиду. Пирамида $MNABS$ состоит из двух треугольных пирамид $SMNA$ и $SMAB$. Найдем предварительно координаты нужных векторов. Тогда имеем:

$$\overline{SM}\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};-h\right),\ \overline{SN}\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-h\right),\ \overline{SA}\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{4};-h\right),$$

$$\overline{SB}\left(-\frac{a}{4};-\frac{a}{4};-\frac{h}{2}\right).$$

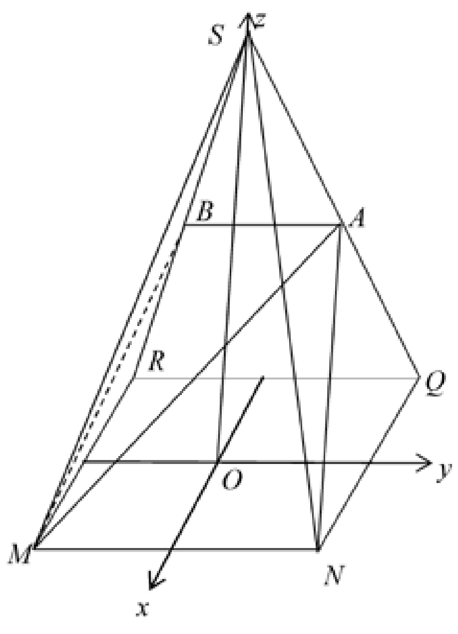

Рисунок 4.

Теперь перейдем к вычислению объемов:

$$V_{SMNA}=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & -h\\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & -h\\ -\frac{a}{4} & \frac{a}{4} & -\frac{h}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{12}a^2h,$$

$$V_{SMAB}=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & -h\\ -\frac{a}{4} & \frac{a}{4} & -\frac{h}{2}\\ -\frac{a}{4} & -\frac{a}{4} & -\frac{h}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{24}a^2h,$$

$$V_{SMNA}+V_{SMAB}=\frac{1}{12}a^2h+\frac{1}{24}a^2h=\frac{1}{8}a^2h.$$

Очевидно, что

$$S_{MNQRS}=\frac{1}{3}a^2h.$$

Теперь найдем объем части пирамиды, находящейся под сечением:

$$V_{MNQRBA}=\frac{1}{3}a^2h-\frac{1}{8}a^2h=\frac{5}{24}a^2h.$$

Найдем искомое отношение части данной пирамиды:

$$\frac{V_{SMNAB}}{V_{MNQRBA}}=\frac{\frac{1}{8}a^2h}{\frac{5}{24}a^2h}=\frac{3}{5}.$$

Список литературы:

1. Samed J. Aliyev, Bahadur O. Tahirov, Tarana A. Hashimova. Varlative problems in teaching mathematics // European Journal of Pure and Applied Mathematics, – New York, – Vol. 15. – No. 3. 2022. – P. 1015–1022.
2. Маланичева Т. А. Снова о различных способах решения арифметической задачи // Математика в школе, – № 1. 2015. – С. 36–38.
3. Ажгалиева А. О., Ажгалиева О. А. О двадцати пяти способах решения одной задачи // Математика в школе, – № 6. 2009. – С. 39–47.
4. Зеленский А. С. Решение задачи разными способами, или как математика помогает футболисту // Математика в школе, – № 10. 2015. – С. 59–64.
5. Зеленский А. С., Панфилов И. Л. Различные способы решения задачи С5 ЕГЭ: сравнительный анализ, ошибки и недочеты оценивая // Математика в школе, – № 8. 2013. – С. 15–24.