Section 2. Mathematics

https://doi.org/10.29013/EJTNS-22-1.2-12-16

Aliyev Samed Jahangir oqlu,
Baku State University, Azerbaijan,
Aliyeva Arzu Qambar qizi,
Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan
National Academy of Sciences

SOME A PRIORI ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF A MULTIDIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR A CLASS OF NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

Abstract. Some a priori estimates in $C([0,T];W_2^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L_2(\Omega))$ is obtained for all the possible almost everywhere solutions of a multidimensional mixed problem under consideration.

Keywords: *mixed problem, non-linear differential equation, a priori estimate.*

Алиев Самед Джахангир оглы,
Бакинский Государственный Университет, Азербайджан,
Алиева Арзу Гамбар кызы,
Институт Математики и Механики
Национальной Академии Наук Азербайджана, Азербайджан

НЕКОТОРЫЕ АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация. Для всевозможных решений почти всюду рассматриваемой многомерной смешанной задачи получены в $C\Big([0,T];W_2^1(\Omega)\Big)\cap C^1\big([0,T];L_2(\Omega)\big)$ некоторые априорные оценки.

Ключевые слова: смешанная задача, нелинейное дифференциальное уравнение, априорная оценка.

В работе получены некоторые априорные оценки для всевозможных решений почти всюду следующей многомерной смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}\Big(L\big(u(t,x)\big)\Big)=F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),$$

$$u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))\ \ \big(t\in[0,T],x\in\Omega\big),\qquad(1)$$

$$u(0,x)=\phi(x)\ \ \big(x\in\Omega\big),\ u_t(0,x)=\psi(x)\ \ \big(x\in\Omega\big),\qquad(2)$$

$$u(t,x)\big|_{\Gamma}=0,\qquad(3)$$

где $0<T<+\infty$; $x=(x_1,...,x_n)$, $\Omega-n$ – мерная ограниченная область с достаточно гладкой границей S, $\Gamma=[0,T]\times S$;

$$L(u(t,x))=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j}\right)-a(x)\cdot u(t,x), \quad (4)$$

причём функции $a_{ij}(x)$ $\left(i,j=\overline{1,n}\right)$ и $a(x)$ измеримы и ограничены в Ω и в области Ω удовлетворяют условиям

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ a(x)\geq 0,\ \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j\geq \geq\alpha\cdot\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\ (\alpha=const>0), \quad (5)$$

ξ_i – любые действительные числа; F, ϕ, ψ – заданные функции, а $u(t,x)$ – искомая функция.

Обозначим через $\overset{\circ}{Д}_1(Q_T)$ $(Q_T\equiv[0,T]\times\Omega)$ совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в δ – окрестности боковой поверхности цилиндра Q_T, имеющей вид: $Q_{T,\delta}=[0,T]\times\Omega_\delta$, где Ω_δ есть совокупность точек Ω, удалённых от границы Ω на расстояние, не больше δ. Замыкание $\overset{\circ}{Д}_1(Q_T)$ в норме $W_2^1(Q_T)$ обозначим $\overset{\circ}{Д}_1(Q_T)$. Очевидно, что $\overset{\circ}{Д}_1(Q_T)\subset\subset W_2^1(Q_T)$.

Определение. Решением почти всюду задачи (1)–(3) назовём функцию $u(t,x)\in\overset{\circ}{Д}_1(Q_T)$, принадлежащую пространству $L_2(Q_T)$ вместе со всеми своими производными $u_t(t,x),u_{x_i}(t,x)$ $(i=\overline{1,n})$, $u_{tx_i}(t,x)$ $(i=\overline{1,n})$, $u_{x_ix_j}(t,x)$ $(i,j=\overline{1,n})$, $u_{tt}(t,x)$, $u_{tx_ix_j}(t,x)$ $(i,j=\overline{1,n})$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в Q_T и принимающую начальные значения (2) почти всюду в Ω.

Отметим работы [1; 2; 3; 5], посвященные изучению смешанных задач для нелинейных уравнений третьего порядка.

Теорема. Пусть

1. Обобщённые производные $\frac{\partial}{\partial x_k}a_{ij}(x)$ $(i,j,k=\overline{1,n})$ измеримы и ограничены в .Ω

2. $$F(t,x,u,\ u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})=f(t,x,u)+\Phi(t,x,u)+ +H(t,x,u,\ u_t,u_x,u_{tx},u_{xx}), \quad (6)$$

причём

а) $f(t,x,u)\in C(\overline{Q}_T\times(-\infty,\infty))$, $\int_0^u f(t,x,\xi)d\xi\equiv$

$$\equiv g(t,x,u)\leq C\cdot\{1+u^2-g_0(u)\},$$

где $C>0$ – постоянная, $0\leq g_0(u)\in C(-\infty,\infty)$, при $n\geq 4$ $g_0(u)\leq C\cdot\left\{1+|u|^\gamma\right\}$, $0<\gamma\leq\frac{2n}{n-4}$ ($C>0$ – постоянная); $f_t(t,x,u)\in C(\overline{Q}_T\times(-\infty,\infty))$, $-\int_0^u f_t(t,x,\xi)d\xi\leq C\cdot\left\{1+u^2\right\}$, где $C=const>0$; $g(0,x,\phi(x))\in L(\Omega)$;

б) $\Phi(t,x,u)\in C(\overline{Q}_T\times(-\infty,\infty))$, $|\Phi(t,x,u)|\leq C\cdot\left\{1+|u|+\sqrt{g_0(u)}\right\}$, где $C=const>0$;

в) $H(t,x,\xi_1,...,\xi_N)\in C(\overline{Q}_T\times(-\infty,\infty)^N)$ $(N=2+ +2n+n^2)$, $H(t,x,\xi_1,...,\xi_N)\cdot\xi_2\leq C\cdot\left\{1+\sum_{i=1}^{n+2}\xi_i^2+g_0(\xi_1)\right\}+$

$$+\varepsilon_0\cdot\sum_{i=n+3}^{2n+2}\xi_i^2,\ \varepsilon_0<\alpha, \quad (7)$$

где $C=const>0$, $\alpha>0$ – число, фигурирующее в (5).

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)–(3) справедливы следующие априорные оценки:

$$\int_\Omega u_t^2(t,x)dx\leq C_0\ \forall t\in[0,T],$$
$$\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial t\partial x_i}\right)^2dxdt\leq C_0. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $u(t,x)$ – любое решение почти всюду задачи (1) – (3). Для удобства примем следующие обозначения:

$$f(u(t,x))=f(t,x,u(t,x)),\ \Phi(u(t,x))= =\Phi(t,x,u(t,x)), \quad (9)$$

$$H(u(t,x)=H(t,x,u(t,x),\ u_t(t,x),u_x(t,x), u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x)), \quad (10)$$

$$F(u(t,x))=f(u(t,x))+\Phi(u(t,x))+H(u(t,x)). \quad (11)$$

Умножив обе части уравнения (1) на функцию $2u_t(t,x)$, проинтегрируем полученное равенство по цилиндру $(0,t)\times\Omega$, где $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^t\int_\Omega \{2u_{\tau\tau}(\tau,x)\cdot u_\tau(\tau,x)-2Lu_\tau(\tau,x)\cdot u_\tau(\tau,x)\}dxd\tau = \\ =2\int_0^t\int_\Omega F(u(\tau,x))\cdot u_\tau(\tau,x)dxd\tau. \qquad (12)$$

Пользуясь условиями (2) и (3), легко получить, что $\forall t\in[0,T]$:

$$2\int_0^t\int_\Omega u_{\tau\tau}(\tau,x)\cdot u_\tau(\tau,x)dxd\tau = \\ =\int_\Omega u_t^2(t,x)dx-\int_\Omega \psi^2(x)dx, \qquad (13)$$

$$-\int_0^t\int_\Omega Lu_\tau(\tau,x)\cdot u_\tau(\tau,x)dxd\tau = \\ -\int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial^2u(\tau,x)}{\partial\tau\partial x_j}\right)\times \\ \times u_\tau(\tau,x)dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega a(x)\cdot u_\tau^2(\tau,x)dxd\tau = \\ =\int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2u(\tau,x)}{\partial\tau\partial x_j}\times\frac{\partial^2u(\tau,x)}{\partial\tau\partial x_i}dxd\tau+ \\ \times\frac{\partial^2u(\tau,x)}{\partial\tau\partial x_i}dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega a(x)\cdot u_\tau^2(\tau,x)dxd\tau\ge \\ \ge\alpha\cdot\int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2u(\tau,x)}{\partial\tau\partial x_i}\right)^2dxd\tau, \qquad (14)$$

где $\alpha>0$ – число, фигурирующее в (5).

Теперь, пользуясь соотношениями (13) и (14), из (12) получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_\Omega u_t^2(t,x)dx+2\alpha\cdot \\ \cdot\int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2u(\tau,x)}{\partial\tau\partial x_i}\right)^2dxd\tau\le\int_\Omega\psi^2(x)dx+ \qquad (15) \\ +2\int_0^t\int_\Omega F(u(\tau,x))\cdot u_\tau(\tau,x)dxd\tau.$$

Далее, пользуясь условием 2_a данной теоремы, получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^t\int_\Omega f(\tau,x,u(\tau,x))\cdot u_\tau(\tau,x)dxd\tau = \\ =\int_0^t\int_\Omega\frac{\partial}{\partial\tau}[g(\tau,x,u(\tau,x)]dxd\tau- \\ -\int_0^t\int_\Omega g_\tau(\tau,x,u(\tau,x))dxd\tau = \\ =\int_\Omega g(t,x,u(t,x))dx-\int_\Omega g(0,x,\phi(x))dx- \\ -\int_0^t\int_\Omega\left[\int_0^{u(\tau,x)}f_\tau(\tau,x,\xi)d\xi\right]dxd\tau\le \\ \le C\cdot\left\{mes\Omega+\int_\Omega u^2(t,x)dx- \right. \\ \left.-\int_\Omega g_0(u(t,x))dx\right\}-\int_\Omega g(0,x,\phi(x))dx+ \\ +C\cdot\int_0^t\int_\Omega(1+u^2(\tau,x))dxd\tau\le \\ \le C\cdot mes\Omega\cdot(1+T)-\int_\Omega g(0,x,\phi(x))dx- \\ -C\cdot\int_\Omega g_0(u(t,x))dx+ \\ +C\cdot\int_\Omega u^2(t,x))dx+C\cdot\int_0^t\int_\Omega u^2(\tau,x)dxd\tau. \qquad (16)$$

Кроме того, пользуясь условием $2_б$ данной теоремы и неравенством (7), $\forall t\in[0,T]$ имеем:

$$2\int_0^t\int_\Omega\Phi(\tau,x,u(\tau,x))\cdot u_\tau(\tau,x)dxd\tau\le \\ \le\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2(\tau,x)dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega\Phi^2(\tau,x,u(\tau,x))dxd\tau\le \\ \le\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2(\tau,x)dxd\tau+3C\cdot \\ \cdot\left\{T\cdot mes\Omega+\int_0^t\int_\Omega u^2(\tau,x)dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega g_0(u(\tau,x))dxd\tau\right\}, \qquad (17)$$

$$\int_0^t\int_\Omega H(u(\tau,x))\cdot u_\tau(\tau,x)dxd\tau\le \\ \le C\cdot T\cdot mes\Omega+C\cdot\int_0^t\int_\Omega\{g_0(u(\tau,x))+u^2(\tau,x)+ \\ +u_\tau^2(\tau,x)+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(\tau,x)\}dxd\tau+ \\ +\varepsilon_0\int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2u(\tau,x)}{\partial\tau\partial x_i}\right)^2dxd\tau, \qquad (18)$$

где функции $H(u(t,x))$ определены соотношением (10).

Теперь из (15), пользуясь обозначением (11) и неравенствами (16)–(18), получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\int_\Omega u_t^2(t,x)dx + 2(\alpha-\varepsilon_0)\cdot\int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial\tau\partial x_i}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+2C\cdot\int_\Omega g_0(u(t,x))dx \le \int_\Omega \psi^2(x)dx + (2+7T)C\cdot mes\Omega -$$

$$-2\int_\Omega g_0(0,x,\phi(x))dx + 2C\int_\Omega u^2(t,x)dx +$$

$$+7C\cdot\int_0^t\int_\Omega u^2(\tau,x)dxd\tau +$$

$$+(1+2C)\cdot\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2(\tau,x)dxd\tau + 5C\cdot\int_0^t\int_\Omega g_0(u(\tau,x))dxd\tau +$$

$$+2C\cdot\int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(\tau,x)dxd\tau \le \tilde{C} + 2C\cdot\int_\Omega u^2(t,x)dx +$$

$$+7C\cdot\int_0^t\int_\Omega u^2(\tau,x)dxd\tau + (1+2C)\cdot\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2(\tau,x)dxd\tau +$$

$$+2C\cdot\int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(\tau,x)dxd\tau + 5C\cdot\int_0^t\int_\Omega g_0(u(\tau,x))dxd\tau, \quad (19)$$

где

$$\tilde{C} \equiv \int_\Omega \psi^2(x)dx + (2+7T)C\cdot mes\,\Omega + 2\int_\Omega \left|g(0,x,\phi(x))\right|dx < +\infty.$$

С другой стороны, очевидно, что $\forall t \in [0,T]$ и $x \in \Omega$:

$$u(t,x) = u(0,x) + \int_0^t u_\tau(\tau,x)d\tau = \phi(x) + \int_0^t u_\tau(\tau,x)d\tau,$$

$$\int_\Omega u^2(t,x)dx \le 2\int_\Omega \phi^2(x)dx + 2T\cdot\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2(\tau,x)dxd\tau, \quad (20)$$

$$\int_0^t\int_\Omega u^2(\tau,x)dxd\tau \le 2t\cdot\int_\Omega \phi^2(x)dx +$$

$$+2T\cdot\int_0^t\left\{\int_0^\theta\int_\Omega u_\tau^2(\tau,x)dxd\tau\right\}d\theta \le$$

$$\le 2T\cdot\int_\Omega \phi^2(x)dx + 2T^2\cdot\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2(\tau,x)dxd\tau, \quad (21)$$

$$u_{x_i}(t,x) = \phi_{x_i}(x) + \int_0^t u_{\tau x_i}(\tau,x)d\tau,$$

$$u_{x_i}^2(t,x) \le 2\phi_{x_i}^2(x) + 2T\cdot\int_0^t u_{\tau x_i}^2(\tau,x)d\tau, \quad (22)$$

$$\int_0^t\int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(\tau,x)\right\}dxd\tau \le 2T\cdot\int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^n \phi_{x_i}^2(x)\right\}dx +$$

$$+2T\cdot\int_0^t\left\{\int_0^\tau\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^n u_{\theta x_i}^2(\theta,x)\right]dxd\theta\right\}d\tau. \quad (23)$$

Теперь, пользуясь неравенствами (20)–(23), из (19) получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\int_\Omega u_t^2(t,x)dx + 2(\alpha-\varepsilon_0)\cdot\int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial\tau\partial x_i}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+2C\cdot\int_\Omega g_0(u(t,x))dx \le C_1 + C_2\cdot\int_0^t\left\{\int_\Omega u_\tau^2(\tau,x)dx +\right.$$

$$\left.+\int_0^\tau\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 u(\theta,x)}{\partial\theta\,\partial x_i}\right)^2 dxd\theta + \int_\Omega g_0(u(\tau,x))dx\right\}d\tau, \quad (24)$$

где $C_1 > 0, C_2 > 0$ – некоторые постоянные.

Из (24), приняв обозначения

$$\delta \equiv \min\{1, 2(\alpha-\varepsilon_0), 2C\},\ C_3 \equiv \frac{C_1}{\delta},\ C_4 \equiv \frac{C_2}{\delta},$$

получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\int_\Omega u_t^2(t,x)dx + \int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial\tau\partial x_i}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+\int_\Omega g_0(u(t,x))dx \le C_3 + C_4\cdot \quad (25)$$

$$\int_0^t\left\{\int_\Omega u_\tau^2(\tau,x)dx + \int_0^\tau\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 u(\theta,x)}{\partial\theta\,\partial x_i}\right)^2 dxd\theta + \int_\Omega g_0(u(\tau,x))dx\right\}d\tau\cdot$$

Из (25), применив неравенство Р. Беллмана [4, с. 188,189], получаем:

$$\int_\Omega u_t^2(t,x)dx + \int_0^t\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial\tau\partial x_i}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+\int_\Omega g_0(u(t,x))dx \le C_5\ \forall t \in [0,T]. \quad (26)$$

где $C_5 \equiv C_3\cdot\exp\{C_4\cdot T\}$.

Из (26), в силу неотрицательности функции $g_0(u)$, следует справедливость априорных оценок (8). Теорема доказана.

Список литературы:

1. Алиев С. Дж. О существовании в малом и единственности в целом решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. I // Вестник БГУ, серия физико-математических наук,– № 3. 2003.– С. 36–42.
2. Алиев С. Дж. О глобальном существовании решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. II // Вестник БГУ, серия физико-математических наук,– № 4. 2003.– С. 35–43.
3. Aliyev S. J., Aliyeva A. Q. The study of multidimensional mixed problem for one class of third order semilinear psevdohyperbolic equations // European Journal of Pure and Applied Mathematics,– V. 10.– No. 5. 2017.– P. 1078–1091.
4. Beckenbach E., Bellman R. Inequalities, Mir, 1965.– 276 p.
5. Худавердиев К. И., Алиев С. Дж. Многомерная смешанная задача для одного класса полулинейных псевдогиперболических уравнений третьего порядка. Баку: Азтехуниверситет, 2012.– 252 с.